9.1 数项级数的收敛性

2024年2月29日 星期四　13:25

对于无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，若其部分和 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ 收敛，则称级数收敛。

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k \qquad r_n=S-S_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

若 S_n 收敛，则 $r_n\to 0$

定理1：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n=0$

（若 $\lim_{n\to\infty} u_n\neq 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 不收敛

定理2：（级数收敛的柯西准则）

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件

P项之和

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists N>0,\ \forall n>N,\ \forall p\in Z^+.\ \left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}\right|<\varepsilon$$

定理3：（线性性）

定理4：（结合律）

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则对其任意项加括号所得级数仍收敛，且和不变

（若加括号级数发散，则原级数发散

定理5：改变级数有限项不改变级数的敛散性

判别法：

1. 正项级数收敛的充要条件是其部分和数列有上界

P级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leq 1$ 时发散

9.2 上极限与下极限

2024年2月27日 星期二 10:05

扩充实数集 $\bar{R}=R\cup\{-\infty,\infty\}$

数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$a\in\bar{R}$

数列的上下极限

假设 $\{x_n\}$ 是有界序列

$$a_n=\inf\{x_n,x_{n+1}\cdots\}=\inf_{k\geq n}x_k$$

$$b_n=\sup\{x_n,x_{n+1}\cdots\}=\sup_{k\geq n}x_k$$

从而 $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n\leq\cdots\leq b_n\leq b_{n-1}\leq\cdots\leq b_1$

$\Rightarrow\{a_n\}.\{b_n\}$ 为单调有界序列 $\Rightarrow$ 收敛！存在（一定）

$$\underline{A}=\sup_n a_n=\sup_n\inf_{k\geq n}x_k \qquad \bar{A}=\inf_n b_n=\inf_n\sup_{k\geq n}x_k$$

$\uparrow$ 下极限 $\qquad\qquad$ $\uparrow$ 上极限

$$\underline{A}=\lim_{n\to\infty}\inf x_n=\varliminf_{n\to\infty}x_n \qquad \bar{A}=\lim_{n\to\infty}\sup x_n=\varlimsup_{n\to\infty}x_n$$

对于无界数列 $\{x_n\}$，规定

- 若 $\{x_n\}$ 无上界，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup x_n=+\infty$（此时 $\forall n$，$b_n=+\infty$）
- 若 $\{x_n\}$ 无下界，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf x_n=+\infty$（此时 $\forall n$，$a_n=+\infty$）
- 若 $\{x_n\}$ 有下界无上界，则 a_n 有定义 $\Rightarrow\underline{A}=\sup\limits_n a_n$ 可以为 $+\infty$

定理 1.1

设 $\{x_n\}$ 为有界数列，$A\in\mathbb{R}$，则以下二者等价

(1) A 为 $\{x_n\}$ 为上极限

(2) $\forall \varepsilon>0$, $\exists N>0$, 当 $n>N$, 有 $x_n<A+\varepsilon$, 而且对 $\forall K$, $\exists n_k>K$,

最大的聚点,

使得 $x_{n_k}>A-\varepsilon$

(3) 存在一个子列 $\{x_{n_k}\}$, 使 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=A$, 而对其他 $\forall$ 收敛子列 x_{n_k}'

收敛到聚点

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}'<A$

证: (1) $\Leftrightarrow$ (2) 设 A 为 $\{x_n\}$ 的上极限, 记 $b_n=\sup\limits_{k\geq n} x_k$,

$$A=\lim_{n\to\infty} b_n=\inf b_n$$

$$A=\inf x_n \Leftrightarrow \begin{cases} b_n\geq A \\ \forall\varepsilon>0, \exists N, b_N\leq A+\varepsilon \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sup\limits_{k\geq N} x_k\geq A \\ \forall\varepsilon>0, \exists N, \sup\limits_{k\geq N} x_k<A+\varepsilon \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall\varepsilon>0, \forall K>0, \exists n_k>K, x_{n_k}>A-\varepsilon \\ \forall\varepsilon>0, \exists N, \forall n\geq N, x_n<A+\varepsilon \end{cases}$$

定理 1.2

- 若有界数列 $\{x_n\}$ 由互不相同的数组成，则
上极限 $\overline{A}$ 是 $\{x_n\}$ 的最大聚点；
下极限 $\underline{A}$ 是 $\{x_n\}$ 的最小聚点。
- 设 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的任一子列，则

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n\leq \varliminf_{k\to\infty} x_{n_k}\leq \varlimsup_{k\to\infty} x_{n_k}\leq \varlimsup_{n\to\infty} x_n.$$

- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$ 的充分必要条件是 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

定理 9.2.4 设 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 是两数列，则

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\geqslant\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$;

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\underline{\lim_{n\to\infty}}y_n.$$

(要求上述诸式的右端不是待定型，即不为 $(+\infty)+(-\infty)$ 等.)

定理 9.2.5 设 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 是两数列，

(1) 若 $x_n\geqslant 0, y_n\geqslant 0$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}}y_n;$$

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x, 0<x<+\infty$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}}y_n.$$

(要求上述诸式的右端不是待定型，即不为 $0\cdot(+\infty)$ 等.)

9.3 正项级数

2024年2月27日 星期二 11:26

定义：设级数 $\sum x_n$ 满足：$\forall n\geq 1$，有 $x_n\geq 0$，则称其为正项级数

性质：正项级数 $\sum x_n$ 的部分和数列 S_n 单增

因此，$\sum x_n$ 收敛，当且仅当 $\{S_n\}$ 有上界

比较判别法：给定正项级数 $\sum x_n$ 与 $\sum y_n$，若 $n\geq 1$，有 $x_n\leq y_n$ → $\exists N_0\in \mathbb{Z}^+$，当 $n\geq N_0$ 时

则：若级数 $\sum y_n$ 收敛，则级数 $\sum x_n$ 收敛 (级数与之前的有限项无关)

(若级数 $\sum x_n$ 发散，则级数 $\sum y_n$ 发散)。

比较判别法的**极限形式** 设 $\sum x_n$ 与 $\sum y_n$ 都是正项级数，且 $\forall n\geq 1$ 有 $y_n\neq 0$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=C\in[0,+\infty)$，则 (量化项趋向0的速度)

(1) 若 $0<C<+\infty$，则 $\sum x_n$ 与 $\sum y_n$ 具有相同的敛散性

$\exists N_0\in \mathbb{Z}^+$，当 $n\geq N_0$ 时，$\frac{C}{2}\leq\frac{x_n}{y_n}\leq 2C \Rightarrow \frac{C}{2}y_n\leq x_n\leq 2Cy_n$

(2) 若 $C=0$，当 $\sum y_n$ 收敛，$\sum x_n$ 收敛 (若 $\sum x_n$ 发散，$\sum y_n$ 发散)

(3) 若 $C=+\infty$，当 $\sum y_n$ 发散，$\sum x_n$ 发散 (若 $\sum x_n$ 收敛，$\sum y_n$ 收敛)

→ eg. 判断 $\sum 2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$ 的敛散性 (仅需与 $(\frac{2}{3})^n$ 比较)

→ eg. 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{\pi}{n})$ 的敛散性

由 $e^x=1+x+o(x)$ $(x\to 0)$

$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ $(x\to 0)$

$$\left.\begin{aligned}e^{\frac{1}{n^2}}&=1+\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\\ \cos\frac{\pi}{n}&=1-\frac{\pi^2}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\end{aligned}\right\}\to (1+\frac{\pi^2}{2})\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}}=1+\frac{\pi^2}{2}$$ 从而原级数收敛

→ eg. 判断 $\sum(\sqrt[n]{a}-1)$ 的敛散性，其中 $a>1$

$a^x=e^{x\ln a}=1+\ln a\,x+\frac{1}{2}(\ln a\,x)^2+o(x^2)$

$\Rightarrow \dfrac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \to \ln a \ (n\to\infty)$ $\Big\}$ $\to \sum(\sqrt[n]{a}-1)$发散

$\sum\frac{1}{n}$发散

$\sum(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2)$的敛散性，$a>1$ 收敛！

根式判别法与比式判别法

若$\exists N_0\in\mathbb{Z}^+, \forall n\ge N_0, \underline{x_n\le q^n}$（其中$0\le q<1$），则$\sum x_n$收敛

$\Uparrow$

$(q=\frac{r+1}{2})$

$\exists 0<q<1$, s.t. $\to \sqrt[n]{x_n}\le q$

$\exists N_0\in\mathbb{Z}^+$，当$n\ge N_0$

f

$\Uparrow$

$\lim\sqrt[n]{x_n}=r<1$

根式判别法 设$\sum x_n$是正项级数. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=r$

可改为 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=r$

(1) 若 $r<1$，则$\sum x_n$收敛

(2) 若 $r>1$，当$\sum x_n$收敛

(3) 若 $r=1$，则$\sum x_n$可能收敛，也可能发散

不可改写

数列极限的性质：给定数列$\{x_n\}$，若$\forall n\ge1$，有$x_n>0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=l$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=l$

比式判别法 设$\sum x_n$是正项级数. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=r$

（每两项之间形成关系了）

(1) 若 $r<1$，则$\sum x_n$收敛

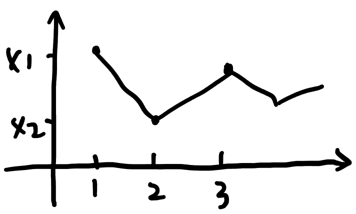
(2) 若 $r>1$，则$\sum x_n$发散

(3) 若 $r=1$，则$\sum x_n$可能收敛，也可能发散

$\to$ eg. $\sum n^2e^{-n}$敛散性

$\sqrt[n]{n^2e^{-n}}=\frac{1}{e}(\sqrt[n]{n})^2\to\frac{1}{e}$ 收敛

积分判别法 设$\sum x_n$是一个给定的正项级数



由此定义 $\mathbb{Z}^+\longrightarrow\mathbb{R}$

$n\longmapsto x_n$

可延拓为$[1,+\infty)$上的函数

(方法多样)

要求：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

要比较：$f(n+1) \le \int_n^{n+1} f(x)\,dx \le f(n)$

再要求：$\left.\begin{array}{l} f\text{在}[1,+\infty)\text{上单调} \\ +f\text{非负} \end{array}\right\} \Rightarrow f\text{在}[1,+\infty)\text{上非负}$

定理：如果f是定义在$[1,+\infty)$上的非负单减函数，则

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ 收敛} \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ 收敛}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow \quad \swarrow S_n$$

$$F(x)=\int_1^x f(t)\,dt \text{ 有上界} \overset{\text{欲证}}{\Longleftrightarrow} \left\{\sum_{k=1}^{n} f(k)\right\} \text{有上界}$$

证：(1) ($\Rightarrow$) 设F在$[1,+\infty)$上有上界M，则

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(k) \le f(1)+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx = f(1)+\int_1^n f(x)\,dx$$
$$\le f(1)+M$$

$\Rightarrow \{S_n\}$ 有上界

(2) ($\Leftarrow$) 设$\{S_n\}$有上界M，则

$$\int_1^{n+1} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} f(t)\,dt \le \sum_{k=1}^{n} f(k) = S_n \le M$$

从而对$\forall x\ge 1$，有

$$F(x)=\int_1^x f(t)\,dt \le \int_1^{[x]+1} f(t)\,dt \le M$$

→ eg. 讨论P级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$的敛散性

令 $f(x)=\frac{1}{x^p}$，$x\in[1,+\infty)$

由于 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx$ 收敛 $\Longleftrightarrow p>1$

所以由积分判别法，当$p\ge 0$时，P级数收敛$\Longleftrightarrow p>1$

当$p<0$时，$\frac{1}{n^p}\not\to 0\ (n\to\infty)$　所以 $p>1$

→ eg. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p(\ln n)^q}$ 敛散性（其中 $p,q\in\mathbb{R}$）

分析：i) 当$p>1$时，

$$\frac{x_n}{\frac{1}{n^{(p+1)/2}}} = \frac{\frac{1}{(\ln n)^q}}{n^{(p-1)/2}} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

由于$\frac{p-1}{2}>0$

由$\frac{p+1}{2}>1$，$\sum\frac{1}{n^{(p+1)/2}}$收敛，原式收敛

ii) 当 $p<1$ 时，

$$\frac{x_n}{\frac{1}{n^{(p+1)/2}}}=\frac{n^{(1-p)/2}}{(\ln n)^q}\xrightarrow{\text{由于}\frac{1-p}{2}>0}+\infty\ (n\to\infty)$$

原级数发散

$x_0=\max\{1,e^{-q}\}+1$ 即可

iii) 当 $p=1$ 时，$\forall q\in\mathbb{R}$，$\exists x_0>1$，使 f 在 $[x_0,+\infty)$ 上单减（求导）

$$\int_{x_0}^{+\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\ln x}\right)^q dx=\int_{x_0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\ln x}\right)^q d(\ln x)=\int_{\ln x_0}^{+\infty}\frac{1}{x^q}\,dx$$

当且仅当 $q>1$，原级数收敛.

☆ 若正项级数 $\sum x_n$ 收敛，则存在正项级数 $\sum y_n$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=+\infty$，且 $\sum y_n$ 收敛

$\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0\to$ 令 $\sum y_n$ 的余和数列为 $\{\sqrt{r_n}\}$

$y_n=\sqrt{r_{n-1}}-\sqrt{r_n}$

$x_n=r_{n-1}-r_n$

若正项级数 $\sum x_n$ 发散，则存在正项级数 $\sum y_n$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=0$，且 $\sum y_n$ 收敛

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$

$\to$ 令 $\sum y_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$

$$\left.\begin{aligned}y_n&=\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}\\x_n&=S_n-S_{n-1}\end{aligned}\right\}\ \frac{1}{\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}}$$

9.4 任意项级数

2024年2月27日 星期二　12:06

交错级数

定义：如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 满足：$\forall n \geq 1$，$x_n = (-1)^{n+1} u_n$ 且 $u_n > 0$

则称该级数为交错级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$

定理（交错级数的Leibniz判别法）

若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ 满足 $\{u_n\}$ 单减趋于 0，则该级数收敛

（从某项开始）

分析：（柯西准则）

$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+p}|$

$= |(-1)^{n+2} u_{n+1} + (-1)^{n+3} u_{n+2} + \cdots + (-1)^{n+p+1} u_{n+p}|$

$= u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots + (-1)^{p+1} u_{n+p}$

当p是奇数，

$S_{n+p} - S_n = u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) + \cdots - (u_{n+p-1} - u_{n+p}) \leq u_{n+1}$

$S_{n+p} - S_n = (u_{n+1} - u_{n+2}) + \cdots + u_{n+p} > 0$

当p为偶数，类似

所以总有 $|x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}| \leq u_{n+1}$

$\forall \varepsilon > 0$，由 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，可得 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$，当 $n > N$ 时，有 $|u_n| < \varepsilon$，

从而由(1)式，当 $n > N$ 时，对 $\forall p \in \mathbb{Z}^+$，有

$|u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}| \leq |u_{n+1}| < \varepsilon$

由级数的柯西收敛准则，$\sum (-1)^{n+1} u_n$ 收敛

误差分析：

$\forall p \geq 1$，$0 < S_{p+1} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{1+p} < u_1 \Rightarrow \lim_{p\to\infty} S_{1+p} \leq u_1$

$\forall n \geq 1$　$|r_n| = |S - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} u_k\right| \leq |u_{n+1}|$

→ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ $(p>0)$，$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^q}$ $(q>0)$　$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ 均收敛

→ 例：$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\sqrt{n^2+1}\,\pi)$ 收敛

分析　$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(\sqrt{n^2+1}\,\pi - n\pi)$

在任意项级数中比较判别法不适用

(1) $\forall n \geq 1$，有 $x_n \leq y_n$，$\sum y_n$ 收敛 $\not\Rightarrow \sum x_n$ 收敛

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$ 且 $\sum y_n$ 收敛 $\not\Rightarrow \sum x_n$ 收敛

给定级数 $\sum x_n$，可定义新的级数 $\sum |x_n|$

性质：若 $\sum |x_n|$ 收敛，则 $\sum x_n$ 收敛（柯西收敛准则）

定义：若 $\sum |x_n|$ 收敛，则称 $\sum x_n$ 绝对收敛

若 $\sum x_n$ 收敛，$\sum|x_n|$ 发散，则称 $\sum x_n$ 条件收敛

例：讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}$ 的收敛性

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n^p}}=|x|$ 可得：

若 $|x|<1$，则由根式判别法，$\sum\frac{|x|^n}{n^p}$ 收敛，从而原级数绝对收敛

若 $|x|>1$ $\forall p\in\mathbb{R}$ $\frac{x^n}{n^p}\not\to 0$，从而原级数发散

若 $|x|=1$ ① $x=1$ 时，$\sum\frac{1}{n^p}$ a. 当 $p>1$ 绝对收敛

b. 当 $p\le 1$ 发散

② $x=-1$ 时，$\sum\frac{(-1)^n}{n^p}$ a. 当 $p>1$ 绝对收敛

b. 当 $0<p\le 1$ 条件收敛

c. 当 $p\le 0$ 发散

设 $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots b_n\in\mathbb{R}$，则令 $B_k=\sum_{i=1}^{k}b_i$，$1\le k\le n$

Abel 变换

$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$

$=a_1B_1+a_2(B_2-B_1)+\cdots+a_n(B_n-B_{n-1})$

$=(a_1-a_2)B_1+(a_2-a_3)B_2+\cdots+(a_{n-1}-a_n)B_{n-1}+a_nB_n$

从而 $B^*=\max\{|B_k|,1\le k\le n\}$

$|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n|$

$\le|a_1-a_2|\cdot|B_1|+\cdots+|a_{n-1}-a_n|\cdot|B_{n-1}|+|a_n|\cdot|B_n|$

$\le(|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots+|a_{n-1}-a_n|+|a_n|)\cdot B^*$

若 $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ 单调，则

$=(|a_1-a_n|+|a_n|)\cdot B^*$

令 $a^*=\max\{|a_i|:1\le i\le n\}$

$\le 3a^*B^*$

阿贝尔引理，若

(1) $a_1,a_2,\cdots a_n$ 单调

(2) $B_k=\sum_{i=1}^{k}b_i$，$1\le k\le n$

令 $a^*=\max\{|a_i|,1\le i\le n\}$ $B^*=\max\{|B_k|:1\le k\le n\}$，则

$|a_1b_1+\cdots+a_nb_n|\le 3a^*B^*$

定理：(Abel-Dirichlet 判别法) [利用Abel引理及Cauchy收敛准则]

若以下两个条件之一成立，则 $\sum a_nb_n$ 收敛

(1) (D-判别法) $\{a_n\}$ 单调趋于0，$\sum b_n$ 的部分和数列有界

(2) (A-判别法) $\{a_n\}$ 单调有界，$\sum b_n$ 收敛 (的部分和数列趋于0)

注：对于交错级数 $\sum(-1)^{n+1}u_n$，Leibniz 判别法可由D-判别法得出

例：若 $\{a_n\}$ 单减趋于0，则 $\forall x\in[0,2\pi]$ 有 $\sum a_n\sin nx$ 收敛 $\forall x\in(0,2\pi)$

$\sum a_n\cos nx$ 收敛

分析：$2\sin\frac{x}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right)=\sum_{k=1}^{n}[\cos(k-\frac{1}{2})x-\cos(k+\frac{1}{2})x]=\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x$

因此：$\forall n\geq 1$，有

$\left|2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|<2$

当 $x\neq 0、2\pi$，故 $\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|$ 有界 $=\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$，而当 $x=0.2\pi$ 时 $\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|=0$，亦有界

例：若 $\sum b_n$ 收敛，则

$\sum\frac{b_n}{n^p}(p>0)$ 与 $\sum\frac{b_n}{\sqrt[n]{n+1}}$ 与 $\sum b_n(1+\frac{1}{n})^n$ 均收敛

例：讨论 $\sum\frac{\sin nx}{n^p}$ $(0<x<\pi)$ 的敛散性

$$\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|\leq\frac{1}{n^p}$$

当 $p>1$ 时 $\forall 0<x<\pi$，有原级数绝对收敛

当 $0<p\leq 1$ 时 由Dirichlet 判别法，原级数收敛

$$\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|\geq\frac{1}{n}\sin^2 nx=\frac{1}{2n}(1-\cos 2nx)=\underbrace{\frac{1}{2n}}_{\text{发散}}-\underbrace{\frac{\cos 2nx}{2n}}_{\text{收敛}}\to\text{发散}$$

故 $\sum\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|$ 发散，原级数条件收敛

当 $p\leq 0$ 时，由于 $\sin nx\not\to 0$ $(n\to\infty)$ 可得 $\frac{\sin nx}{n^p}\not\to 0$

故原级数发散

给定一般项级数 $\sum x_n$

令 $x_n^+=\frac{x_n+|x_n|}{2}=\begin{cases}x_n, & x_n\geq 0\text{时}\\ 0, & x_n<0\text{时}\end{cases}$

$x_n^-=\frac{x_n-|x_n|}{2}=\begin{cases}0, & x_n\geq 0\text{时}\\ -x_n, & x_n<0\text{时}\end{cases}$

则 $x_n^++x_n^-=|x_n|$ $\quad n\geq 1$

$x_n^+-x_n^-=x_n$

- 性质：若 $\sum x_n$ 绝对收敛，则 $\sum x_n^+$ 与 $\sum x_n^-$ 都收敛（也是绝对收敛）

理由：$0\leq x_n^+\leq|x|$，$0\leq x_n^-\leq|x_n|$

- 若 $\sum x_n$ 条件收敛，则 $\sum x_n^+$ 与 $\sum x_n^-$ 都发散

反证法：假设 $\sum x_n^+$ 与 $\sum x_n^-$ 其中之一收敛

不妨设 $\sum x_n^+$ 收敛，由(2)式 $x_n^-=x_n^+-x_n$

结合 $\sum x_n$ 收敛，可得 $\sum x_n^-$ 收敛.

又由(1)式，可得 $\sum|x_n|$ 收敛，与 $\sum x_n$ 条件收敛相矛盾

级数的重排

定义：设 $\varphi: Z^+\to Z^+$ 是一个双射，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_{\varphi(n)}$ 是级数 $\sum x_n$ 的一个重排

定理：设 $\sum x_n$ 绝对收敛，则其重排 $\sum x_{\varphi(n)}$ 也绝对收敛，且和不变

证：只需证：$\sum x_{\varphi(n)}$ 必定收敛，且和不变

（理由 $\sum|x_{\varphi(n)}|$ 也是 $\sum|x_n|$ 的一个重排）

令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}x_k$，$S_n'=\sum_{k=1}^{n}x_{\varphi(k)}$

对 $\forall\varepsilon>0$，由 $\sum x_n$ 绝对收敛，$\exists N\in Z^+$，使当 $n>N$ 时，$\forall p\in Z^+$，有

$|x_{n+1}|+\cdots+|x_{n+p}|<\varepsilon$

取 $q\in\mathbb{Z}^+$，使 $\{1,\cdots,N\}\subset\{\varphi(1),\varphi(2),\cdots\varphi(q)\}$，则 $q\ge N$

当 $n>q$ 时，令 $n^*=\max\{\varphi(1)\cdots\varphi(n)\}$

$S_n'=\underbrace{\varphi(1)\quad\varphi(2)\quad\cdots\quad\varphi(q)}_{}\quad\varphi(q+1)\cdots\quad\varphi(n)$

1—N 包含在里面

$|S_n'-S_n|=|(S_n'-S_N)-(S_n-S_N)|$

$\le|S_n'-S_N|+|S_n-S_N|$

$\le\sum_{k=N+1}^{n^*}|x_k|+\sum_{k=N+1}^{n}|x_k|<\varepsilon+\varepsilon$

故 $|S_n'-S_N|\le\sum_{k=N+1}^{n^*}|x_k|$

从而 $\lim_{n\to\infty}S_n'=\lim_{n\to\infty}S_n$ $\Rightarrow$ 定理成立

定理(Riemann) 设 $\sum x_n$ 条件收敛，$-\infty\le\alpha\le\beta\le+\infty$

则一定存在 $\sum x_n$ 的一个重排 $\sum x_{\varphi(n)}$，使其部分和数列 $\{S_n'\}$

满足 $\underline{\lim}_{n\to\infty}S_n'=\alpha$，$\overline{\lim}_{n\to\infty}S_n'=\beta$

级数的乘积

给定 $\sum x_n$，$\sum y_n$，如何定义它们的乘积？

(1) 对角线序

(2) 正方形序

柯西乘积：令 $c_n=x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1=\sum_{k=1}^{n}x_ky_{n+1-k}$，$n\ge1$

称 $\sum c_n$ 为 $\sum x_n$ 与 $\sum y_n$ 的柯西乘积 （更多 → 参考 $(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)\cdot(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n)$）

正方形乘积：令 $c_n'=x_1y_n+x_2y_n+\cdots+x_ny_n+x_ny_{n-1}+\cdots+x_ny_1$，$n\ge1$

称 $\sum c_n'$ 为 $\sum x_n$ 与 $\sum y_n$ 的正方形乘积

柯西定理：设 $\sum x_n$ 与 $\sum y_n$ 都是绝对收敛的，和分别为 A、B

则对于由所有乘积 a_ib_j 按任意顺序所得到的级数 $\sum c_n$ 也绝对

收敛，且其和为 AB

推论：若 $\sum x_n$ 与 $\sum y_n$ 都绝对收敛，则它们的柯西乘积收敛，

并且和为 $(\sum x_n)(\sum y_n)$

证：设 $c_n=a_{i_n}\cdot b_{j_n}$，$n=1,2,\cdots$ 是由所有乘积 a_ib_j 按某一顺序得到的级数

$\forall n\ge1$，令 $N=\max\{i_1,\cdots i_n,j_1,\cdots,j_n\}$，则

$\sum_{k=1}^{n}|c_k|=\sum_{k=1}^{n}|a_{i_k}|\cdot|b_{j_k}|\le(\sum_{k=1}^{N}|a_k|)(\sum_{k=1}^{N}|b_k|)$

$\le(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|)(\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|)$

不能直接使用正方形排列来计算

因为无法确定所得重排序

从而 $\sum c_n$ 绝对收敛，于是只需证 $\sum c_n=AB$

由于绝对收敛的级数重排以及加括号不影响级数的和

列绝对收敛（需要证明前一步）

于是只需要证按正方形序（并加括号）所得的级数 $\sum c_i'$，其和为 AB

由于 $\sum_{k=1}^{n}c_k'=(\sum_{k=1}^{n}a_k)(\sum_{k=1}^{n}b_k)\to AB\ (n\to\infty)$

$\sum_{n=1}^{\infty}c_n'=AB$

Mertens定理：设$\sum a_n$绝对收敛，(和为A)，$\sum b_n$收敛(和为B)

则它们的柯西乘积也收敛，并且和为AB

(两个条件级数柯西乘积可能发散) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

例：(1) 考察$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$与$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$的柯西乘积，其中$|r|<1$

由$|r|<1$，$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$绝对收敛

令$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$为$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$与$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$的柯西乘积，则

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} (r^k)(r^{n-k}) = (n+1) r^n, \quad n \geq 0$$

由柯西定理 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) r^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n\right) = \frac{1}{(1-r)^2}$

(2) 考察$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$与$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$的柯西乘积$(*)$，其中$x, y \in \mathbb{R}$

当$x \neq 0$时 $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \Big/ \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|}{n+1} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ 绝对收敛

当$x=0$时，也有$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$绝对收敛

给定$x, y \in \mathbb{R}$，令$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$为$(*)$，则

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!}(x+y)^n$$

由柯西定理 $\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+y)^n}_{e^{x+y}} = \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)}_{e^x}\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right)}_{e^y}$